

# Comprendere e preparare i dati



Prof. Matteo Golfarelli

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

# Cosa sono i dati?

- Nelle applicazioni di data mining i dati sono composti da collezioni di **oggetti** descritti da un insieme di attributi

- ✓ Sinonimi di oggetto sono record, punto, caso, esempio, entità, istanza, elemento

- Un **attributo** è una proprietà o una caratteristica di un oggetto

- ✓ Sinonimi di attributo sono: variabile, campo, caratteristica

## *Attributi*

<i>Tid</i>	Refund	Marital Status	Taxable Income	Cheat
1	Yes	Single	125K	No
2	No	Married	100K	No
3	No	Single	70K	No
4	Yes	Married	120K	No
5	No	Divorced	95K	Yes
6	No	Married	60K	No
7	Yes	Divorced	220K	No
8	No	Single	85K	Yes
9	No	Married	75K	No
10	No	Single	90K	Yes

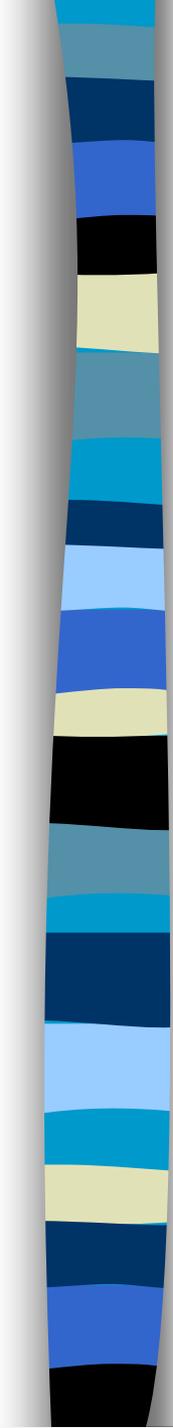
## *Oggetti*

# Tipi di attributi

- It is imperative to know the attribute properties to carry out meaningful operations and research with them
- Un impiegato è descritto da un ID e dall'età, ma non ha senso calcolare l'ID medio degli impiegati!
- Il tipo dell'attributo ci dice quali proprietà dell'attributo sono riflesse nel valore che usiamo come misura
- Un modo semplice per caratterizzare i vari tipi di attributi si basa sul *tipo di operatore* che ha senso applicare ai valori che esso assume:
  - ✓ Diversità =, ≠
  - ✓ Ordinamento <, ≤, >, ≥
  - ✓ Additività +, -
  - ✓ Moltiplicatività \*, /
- Si determinano così 4 tipi di dati: : **nominali, ordinali, di intervallo,** e di **rapporto**

# Tipi di attributi

Tipo		Descrizione	Esempio	Operatori statistici
Categorici (qualitativi)	Nominale	Nomi diversi dei valori. Possiamo solo distinguerli	Sesso, colore degli occhi, codici postali, ID	Moda, correlazione
	Ordinale	I valori ci consentono di ordinare gli oggetti in base al valore dell'attributo	Voto, Durezza di un minerale	Mediana, percentile
Numerici (quantitativi)	Di Intervallo	La differenza tra i valori ha un significato, ossia esiste una unità di misura	Date, temperatura in Celsius e Fahrenheit	Media, varianza
	Di Rapporto	Il rapporto tra i valori ha un significato	Età, massa, lunghezza, quantità di denaro, temperatura espressa in Kelvin	Media geometrica, media armonica



# Tipi di attributi: altre classificazioni

## ■ Binari, discreti e continui

- ✓ Un attributo discreto ha un numero finito o un insieme infinito numerabile di valori normalmente rappresentati mediante interi o etichette
- ✓ Un attributo continuo assume valori reali
- ✓ Gli attributi nominali e ordinali sono tipicamente discreti o binari, mentre quelli di intervallo e di rapporto sono continui

## ■ **Attributi asimmetrici**: hanno rilevanza solo le istanze che assumono valori diversi da zero:

- ✓ Es. Consideriamo i record relativi agli studenti: in cui ogni attributo rappresenta un corso dell'Ateneo che può essere seguito (1) o meno (0) dallo studente. Visto che gli studenti seguono una frazione molto ridotta dei corsi dell'Ateneo se si comparassero le scelte degli studenti sulla base di tutti i valori degli attributi il loro comportamento apparirebbe molto simile.

# Documenti

- I documenti sono gli oggetti dell'analisi, sono descritti da un vettore di termini
  - ✓ Ogni termine è un attributo del documento
  - ✓ Il valore degli attributi indica il numero di volte in cui il corrispondente termine compare nel documento.

	team	coach	play	ball	score	game	win	lost	timeout	season
Document 1	3	0	5	0	2	6	0	2	0	2
Document 2	0	7	0	2	1	0	0	3	0	0
Document 3	0	1	0	0	1	2	2	0	3	0



*Che tipo di dato è?*

# Transazioni

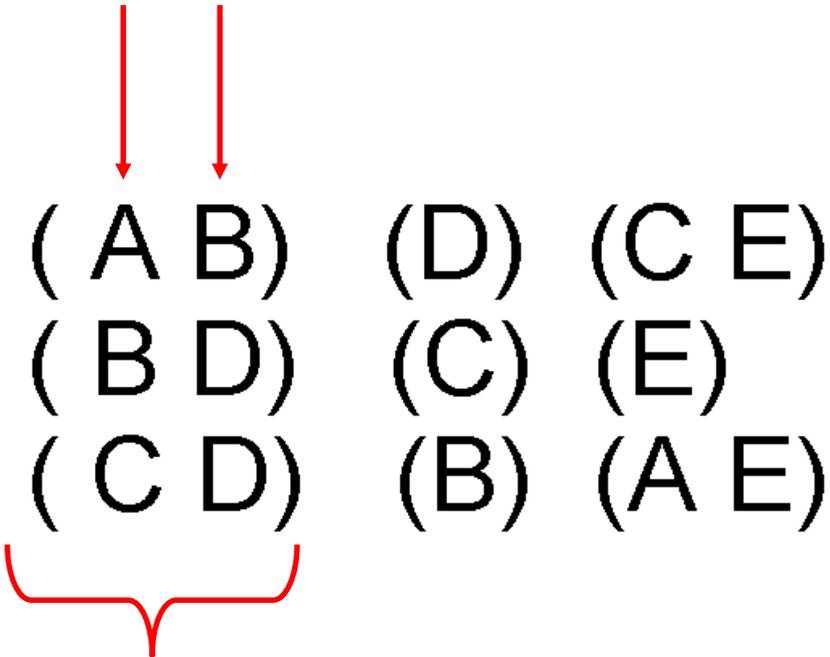
- Un tipo speciale di record in cui
  - ✓ Ogni record (transazione) coinvolge più item
  - ✓ Per esempio in un supermercato l'insieme dei prodotti comprati da un cliente durante una visita al negozio costituisce una transazione, mentre i singoli prodotti acquistati sono gli item.
  - ✓ Il numero degli item può variare da transazione a transazione

<i>TID</i>	<i>Items</i>
1	Bread, Coke, Milk
2	Beer, Bread
3	Beer, Coke, Diaper, Milk
4	Beer, Bread, Diaper, Milk
5	Coke, Diaper, Milk

# Dati ordinati

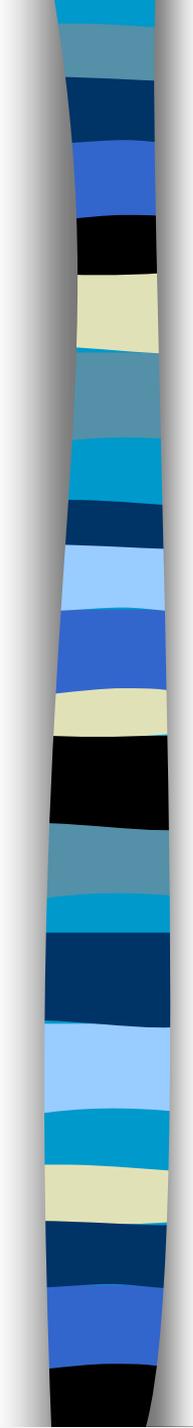
- Sequenze di transazioni

Item/Eventi



( A B )	( D )	( C E )
( B D )	( C )	( E )
( C D )	( B )	( A E )

Un elemento di  
una sequenza



# Dati ordinati

- Sequenze di dati genomici

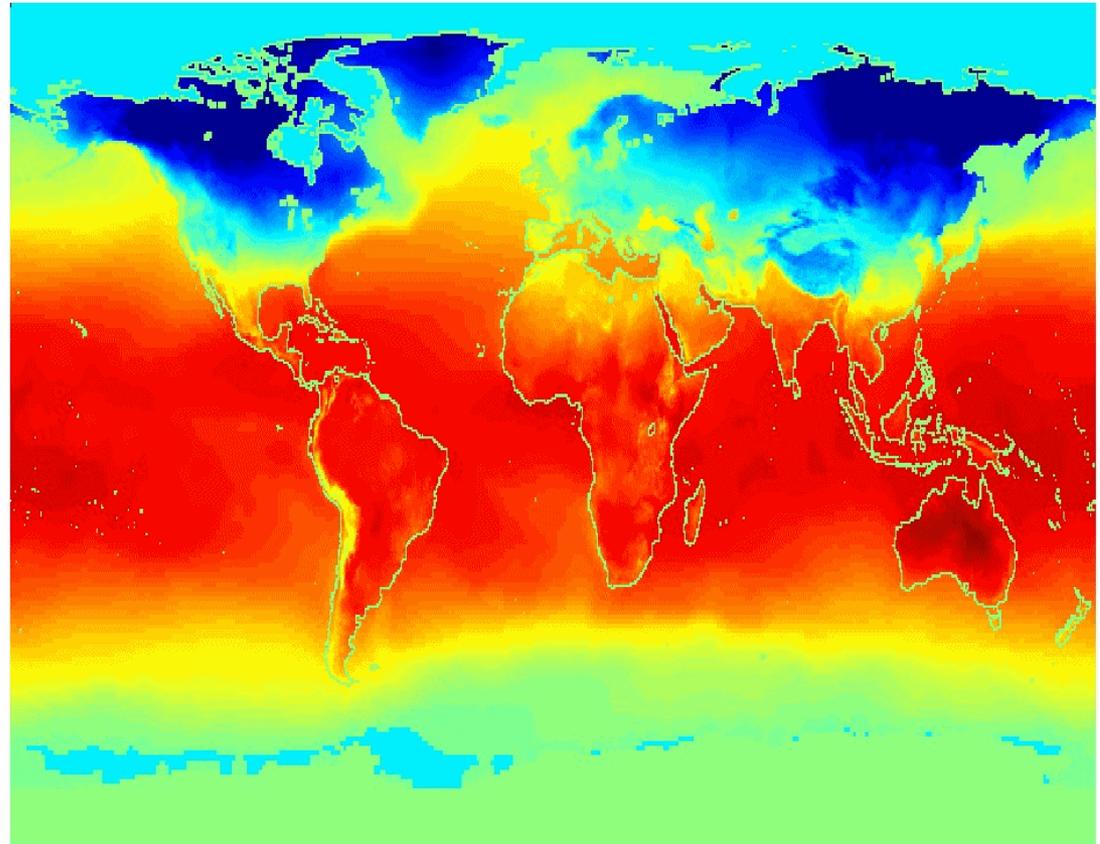
```
GGTTC CGCCTTCAGCCCCGCGCC  
CGCAGGGCCCGCCCCGCGCCGTC  
GAGAAGGGCCCGCCTGGCGGGCG  
GGGGGAGGCGGGGCCGCCCGAGC  
CCAACCGAGTCCGACCAGGTGCC  
CCCTCTGCTCGGCCTAGACCTGA  
GCTCATTAGGCGGCAGCGGACAG  
GCCAAGTAGAACACGCGAAGCGC  
TGGGCTGCCTGCTGCGACCAGGG
```

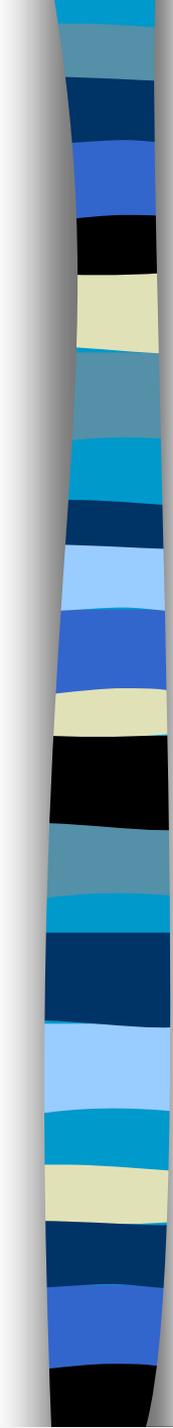
# Dati ordinati

## ■ Dati Spazio-Temporali

Jan

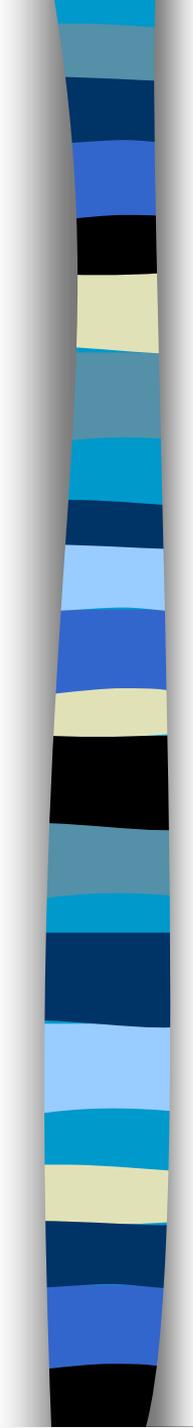
Temperatura  
media mensile di  
terre e oceani





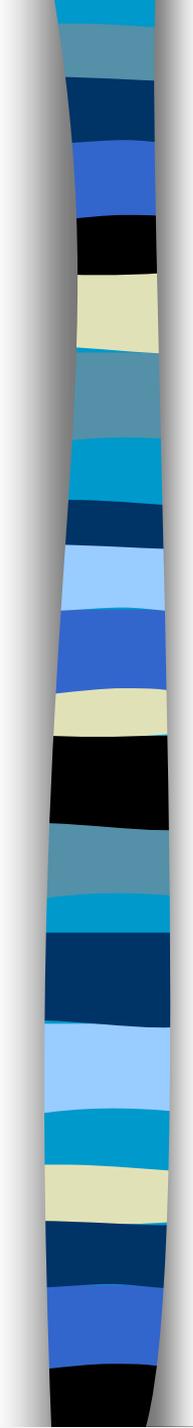
# Esplorazione dei dati

- A preliminary data analysis aimed at identifying the main features
  - ✓ It helps you choose the best tool for preprocessing and analysis  
Allows you to use human skills to locate patterns
  - ✓ A human domain expert can quickly locate unidentifiable patterns from analysis tools
- L'esplorazione dei dati sfrutta
  - ✓ Visualizzazione
  - ✓ Indici statistici
  - ✓ OLAP e Data Warehousing



# Moda e Frequenza

- La **frequenza** del valore di un attributo è la percentuale di volte in cui quel valore compare nel data set
  - ✓ Dato L'attributo 'Comune di residenza' per il data set dei cittadini italiani, il valore 'Bologna' compare circa nello 0.6% dei casi ( $\sim 3.7 \times 10^5 / 6 \times 10^7$ ).
- La **moda** di un attributo è il valore che compare più frequentemente nel data set
  - ✓ La moda per l'attributo 'Comune di residenza' per il data set dei cittadini è 'Roma' che compare circa nel 4.5% dei casi ( $\sim 2.7 \times 10^6 / 6 \times 10^7$ ).
- Le nozioni di frequenza e moda sono normalmente utilizzate per attributi categorici

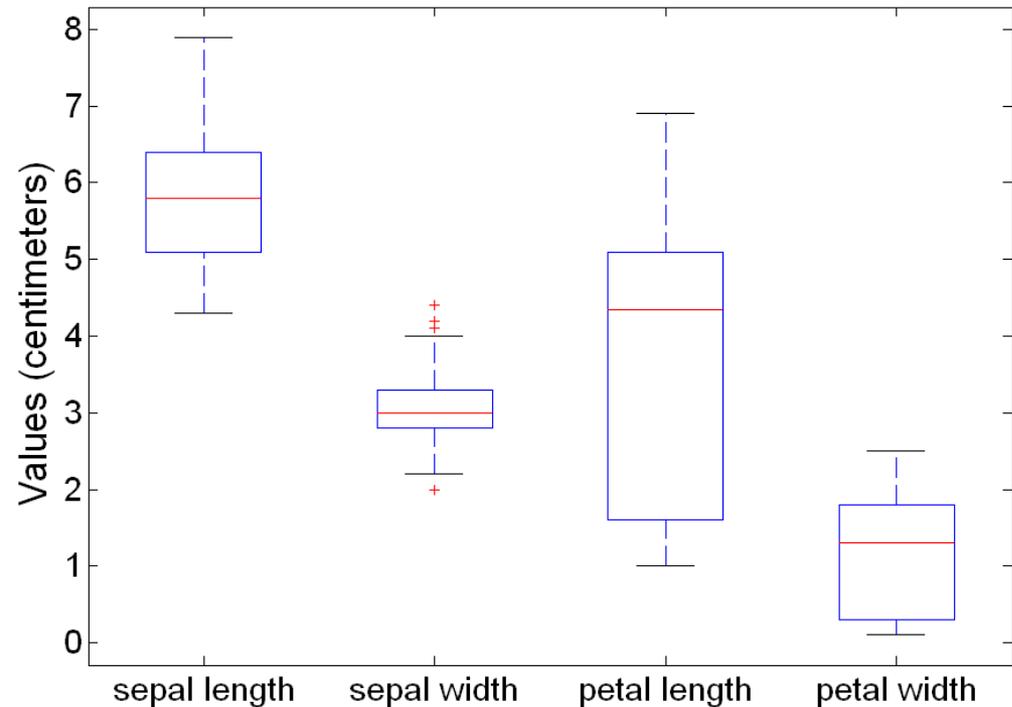
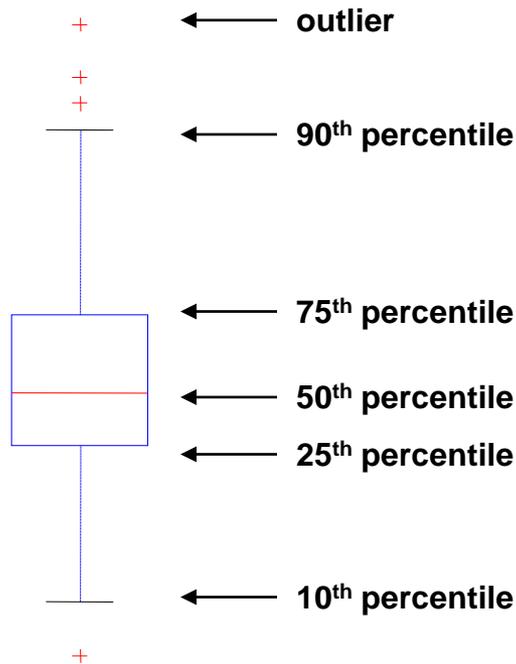


# Percentili

- Dato un attributo ordinale o continuo  $x$  e un numero  $p$  compreso tra 0 e 100, il  $p$ -esimo **percentile** è il valore di  $x_p$  di  $x$  tale che  $p\%$  dei valori osservati per  $x$  sono inferiori  $x_p$ .
  - ✓ Per l'attributo "altezza in centimetri" per la popolazione dei neonati italiani femmine a un anno di vita è:
    - 50-esimo percentile= 78 cm -> la metà delle bambine è più alta di 78 cm
    - 97-esimo percentile= 81 cm -> solo il 3% delle bambine è più alta di 81 cm
- Le informazioni sui percentili sono spesso rappresentate mediante box plot

# Tecniche di visualizzazione: Box Plot

- Permettono di rappresentare una distribuzione di dati
- Possono essere utilizzati per comparare più distribuzioni quando queste hanno grandezze omogenee



# Misure di posizione: media e mediana

- La **media** è la più comune misura che permette di localizzare un insieme di punti

$$mean(\mathbf{x}) = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- Purtroppo la media è molto sensibile agli outlier
- In molti casi si preferisce utilizzare la **mediana** o una media “controllata”.

$$mediana(\mathbf{x}) = \begin{cases} x_{m+1} & \text{se } n \text{ è dispari } n = 2m + 1 \\ (x_m + x_{m+1}) / 2 & \text{se } n \text{ è pari } n = 2m \end{cases}$$

- ✓ In un insieme  $n$  di dati disposti in ordine crescente la mediana è il termine che occupa il posto centrale, se i termini sono dispari, se i termini sono pari la mediana è la media aritmetica dei 2 termini centrali.

# Misure di dispersione: Range e Varianza

- Il **range** è la differenza tra i valori minimi e massimi assunti dall'attributo
- **Varianza** e **deviazione standard** (o scarto quadratico medio ) sono le più comuni misure di dispersione di un data set.

$$\text{Varianza}(\mathbf{x}) = s_{\mathbf{x}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{DevStandard}(\mathbf{x}) = s_{\mathbf{x}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

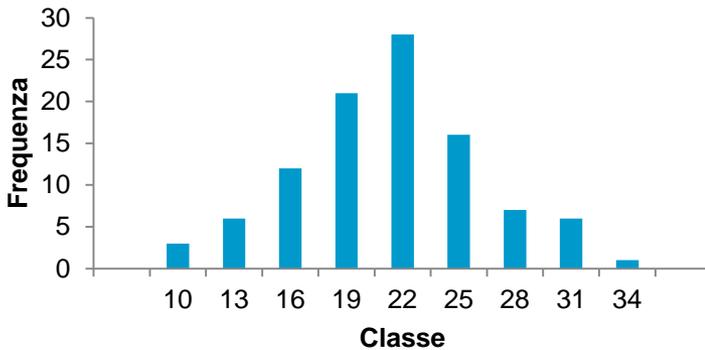
- Varianza e scarto quadratico medio sono sensibili agli outlier poichè sono legati quadraticamente al concetto di media
- Altre misure meno sensibili a questo problema sono:

$$\text{AbsoluteAverageDeviation} \quad AAD(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$$

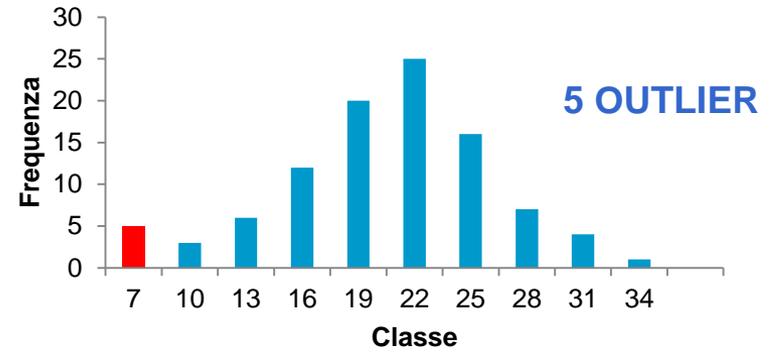
$$\text{MedianAbsoluteDeviation} \quad MAD(\mathbf{x}) = \text{mediana}(\{|x_1 - \bar{x}|, \dots, |x_n - \bar{x}|\})$$

$$\text{InterquartileRange} \quad RI(\mathbf{x}) = x_{75\%} - x_{25\%}$$

# Misure di dispersione: Range e Varianza



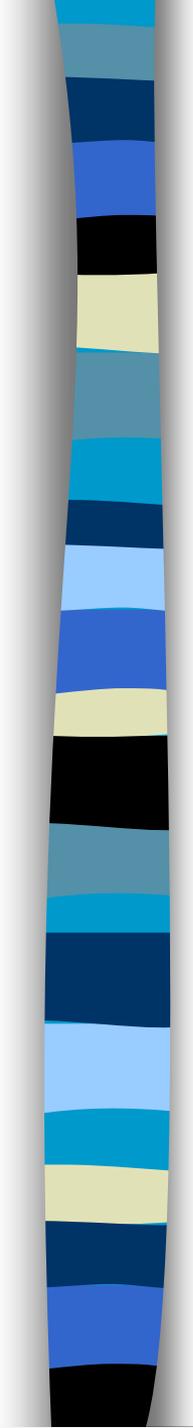
- Media 19,82617
- Mediana 19,65625
- 25% quartile 16,79252
- 75% quartile 22,75032
  
- Varianza 25,31324
- DevStandard 5,031227
- RI 5,957806
- AAD 3,857429
- MAD 2,979841



- Media 18,67617
- Mediana 19,27243
- 25% quartile 15,25606
- 75% quartile 22,55218
  
- **Varianza 37,58087**
- **DevStandard 6,130324**
- RI 7,29612
- AAD 4,579804
- MAD 3,095489

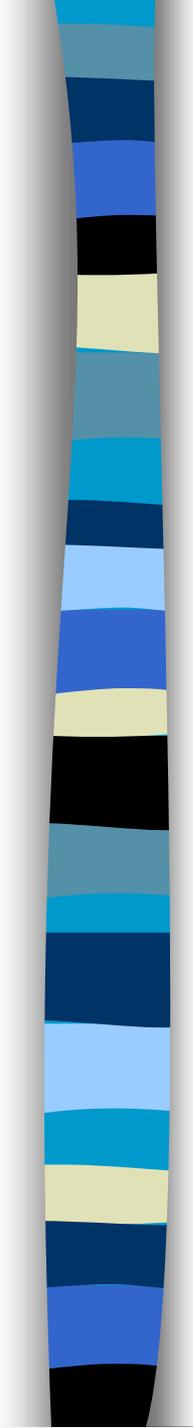
Calcolare i precedenti indici statistici per  $X = \{5, 7, 2, 9, 8, 7, 5, 1, 1, 5\}$





# Qualità dei dati

- La qualità dei dataset utilizzati incide profondamente sulle possibilità di trovare pattern significativi.
- I problemi più frequenti che deteriorano la qualità dei dati sono
  - ✓ Rumore e outlier
  - ✓ Valori mancanti
  - ✓ Valori duplicati

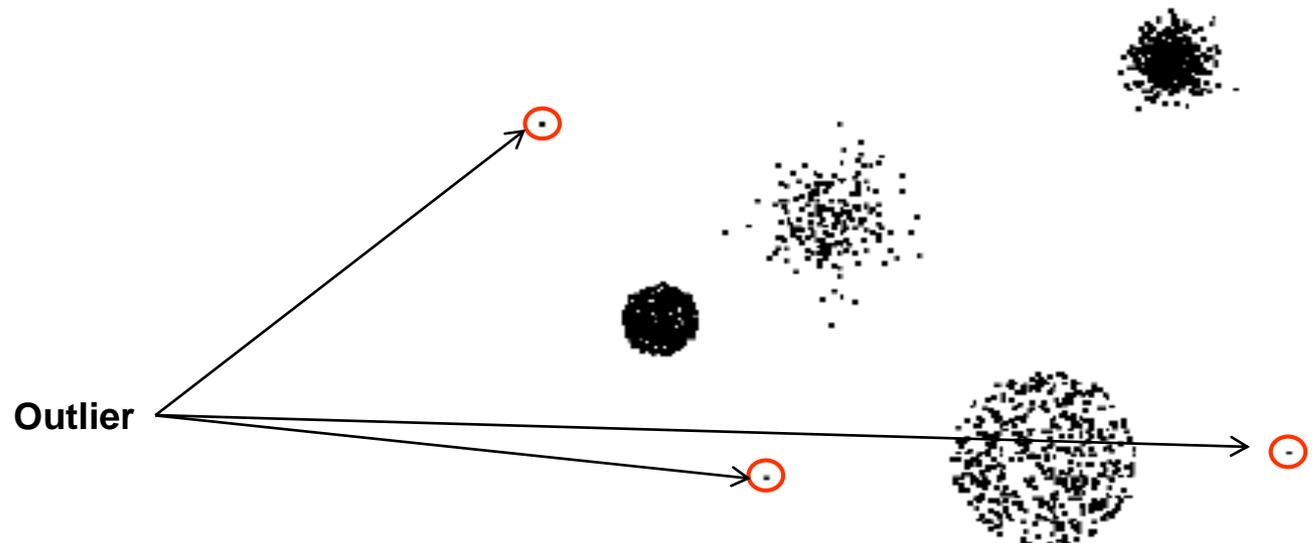


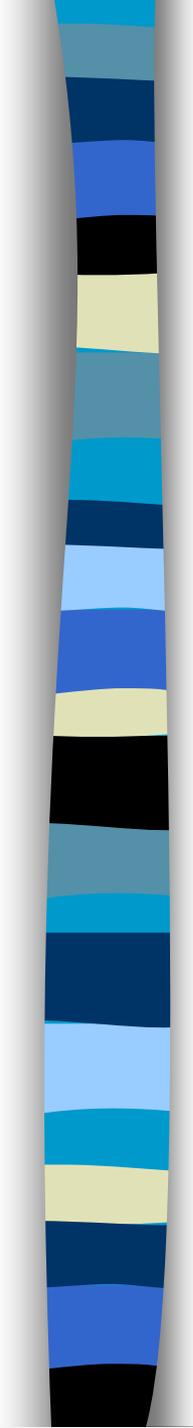
# Rumore

- Indica il rilevamento di valori diversi da quelli originali
  - ✓ Distorsione della voce di una persona quando registrata attraverso un microfono di scarsa qualità
  - ✓ Registrazione approssimata di valori degli attributi
  - ✓ Registrazione errata di valori degli attributi

# Outlier

- Outlier sono oggetti con caratteristiche molto diverse da tutti gli altri oggetti nel data set che complicano la determinazione delle sue caratteristiche essenziali
  - ✓ Sono normalmente rari
  - ✓ Potrebbero essere l'oggetto della ricerca





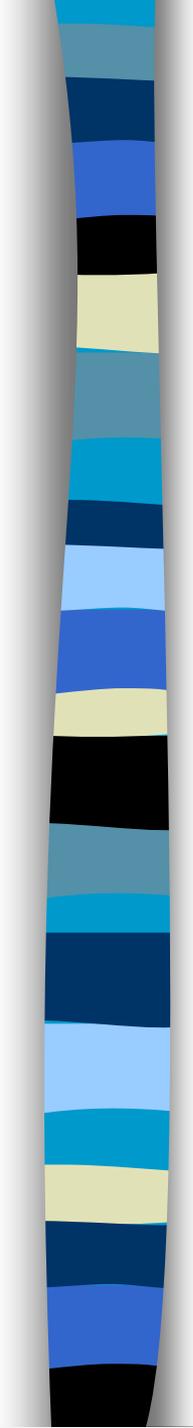
# Valori mancanti

## ■ Motivazioni per la mancata registrazione

- ✓ L'informazione non è stata raccolta (es. l'intervistato non indica la propria età e peso)
- ✓ L'attributo non è applicabile a tutti gli oggetti (es. il reddito annuo non ha senso per i bambini)

## ■ Come gestire i dati mancanti?

- ✓ Eliminare gli oggetti che li contengono (se il dataset è sufficientemente numeroso)
- ✓ Ignorare i valori mancanti durante l'analisi
- ✓ Compilare manualmente i valori mancanti
  - In generale è noioso, e potrebbe essere non fattibile
- ✓ **Compilare automaticamente i valori mancanti**



# Valori mancanti

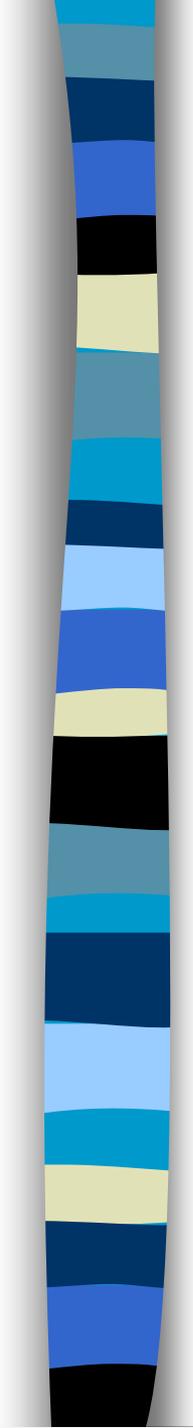
## ■ Come gestire i dati mancanti?

### ✓ Stimare i valori mancanti

- **usare la media** dell'attributo al posto dei valori mancanti
- per problemi di classificazione, usare la media dell'attributo per tutti i campioni della stessa classe
- **predire** il valore dell'attributo mancante sulla base degli altri attributi noti. Si usano algoritmi di data mining per preparare i dati in input ad altri algoritmi di data mining.

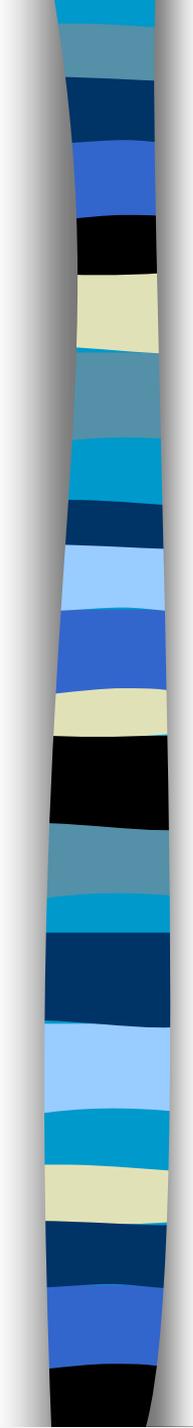
### ✓ Usare un valore costante come “Unknown” oppure 0 (a seconda del tipo di dati).

- potrebbe alterare il funzionamento dell'algoritmo di analisi, meglio allora ricorrere ad algoritmi che gestiscono la possibilità di dati mancanti
- È utile se la mancanza di dati ha un significato particolare di cui tener conto



# Dati duplicati

- Il data set potrebbe includere oggetti duplicati
  - ✓ Problema primario quando il data set è il risultato della fusione di più sorgenti dati
  - ✓ Esempi: stessa persona con più indirizzi e-mail; stesso cliente registrato due volte
- Può essere necessario introdurre una fase di data cleaning al fine di individuare ed eliminare la ridondanza

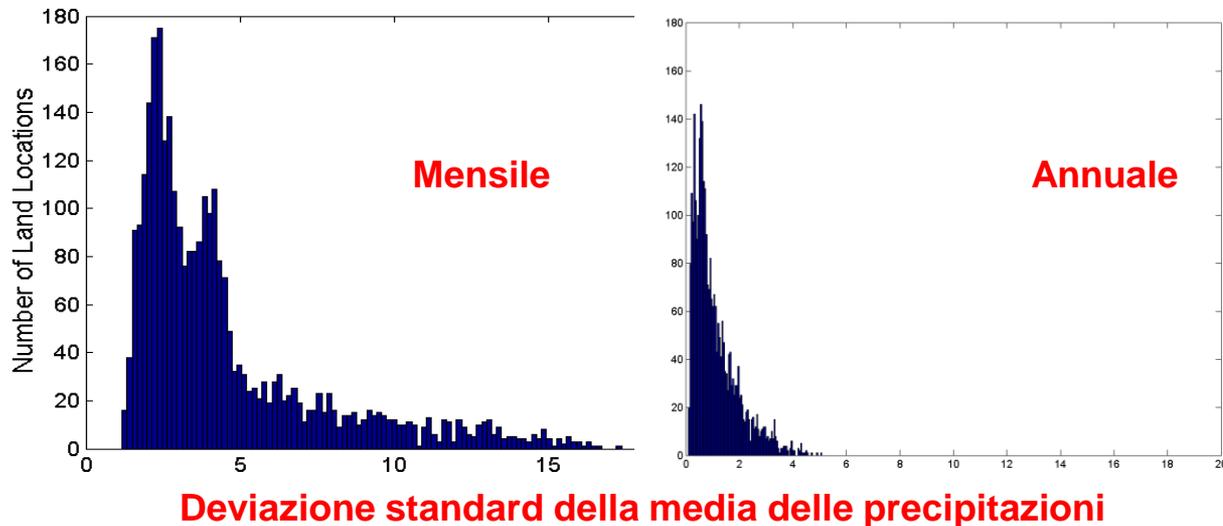


# Preprocessing del data set

- Raramente il dataset presenta le caratteristiche ottimali per essere trattato al meglio dagli algoritmi di data mining. E' quindi necessario mettere in atto una serie di azioni volte a consentire il funzionamento degli algoritmi di interesse
  - ✓ Aggregazione
  - ✓ Campionamento
  - ✓ Riduzione della dimensionalità
  - ✓ Selezione degli attributi
  - ✓ Creazione degli attributi
  - ✓ Discretizzazione e binarizzazione
  - ✓ Trasformazione degli attributi

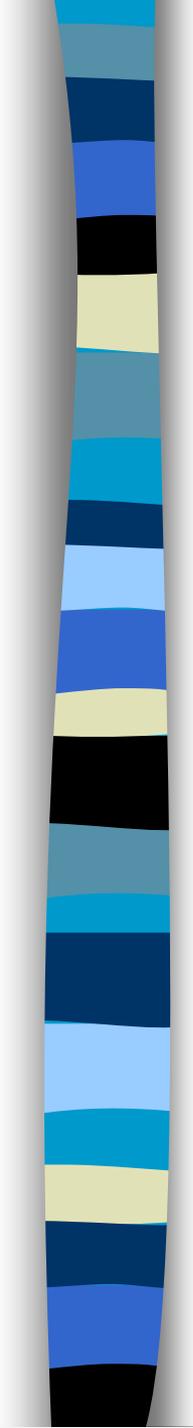
# Aggregazione

- Combina due o più attributi (oggetti) in un solo attributo (oggetto) al fine di:
  - ✓ Ridurre la cardinalità del data set
  - ✓ Effettuare un cambiamento di scala
    - Le città possono essere raggruppate in regioni e nazioni
  - ✓ Stabilizzare i dati
    - I dati aggregati hanno spesso una minore variabilità



# Campionamento

- E' la tecnica principale utilizzata per selezionare i dati
  - ✓ E' spesso utilizzata sia nella fase preliminare sia nell'analisi finale dei risultati.
- Gli statistici campionano poiché **ottenere** l'intero insieme di dati di interesse è spesso troppo costoso o richiede troppo tempo.
- Il campionamento è utilizzato nel data mining perché **processare** l'intero dataset è spesso troppo costoso o richiede troppo tempo.
- Il principio del campionamento è il seguente:
  - ✓ Se il campione è rappresentativo il risultato sarà equivalente a quello che si otterrebbe utilizzando l'intero dataset
  - ✓ Un campione è rappresentativo se ha approssimativamente le stesse proprietà (di interesse) del dataset originale



# Tipi di campionamento

## ■ Campionamento casuale semplice

- ✓ C'è la stessa probabilità di selezionare ogni elemento
- ✓ Campionamento senza reimbussolamento
  - Gli elementi selezionati sono rimossi dalla popolazione
- ✓ Campionamento con reimbussolamento
  - Gli elementi selezionati non sono rimossi dalla popolazione
  - In questo caso un elemento può essere selezionato più volte.
  - Dà risultati simili al precedente se la cardinalità del campione è  $\ll$  di quella della popolazione
  - E' più semplice da esaminare poiché la probabilità di scegliere un elemento non cambia durante il processo

## ■ Campionamento stratificato:

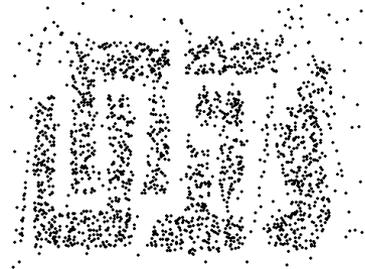
- ✓ Si suddividono i dati in più partizioni, quindi si usa un campionamento casuale semplice su ogni partizione.
- ✓ Utile nel caso in cui la popolazione sia costituita da tipi diversi di oggetti con cardinalità differenti. Un campionamento casuale può non riuscire a fornire un'adeguata rappresentazione dei gruppi meno frequenti

# La dimensione del campione

- Scelta la modalità di campionamento è necessario fissare la dimensione del campione al fine di limitare la perdita di informazione



8000 punti

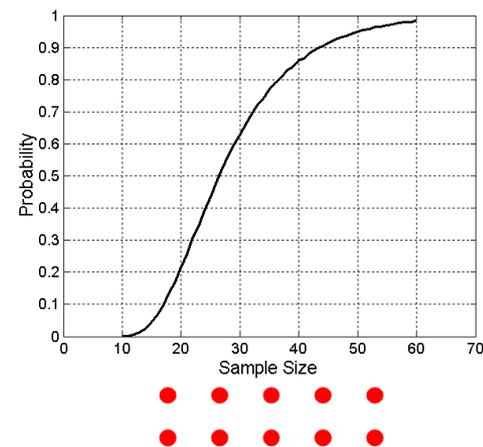


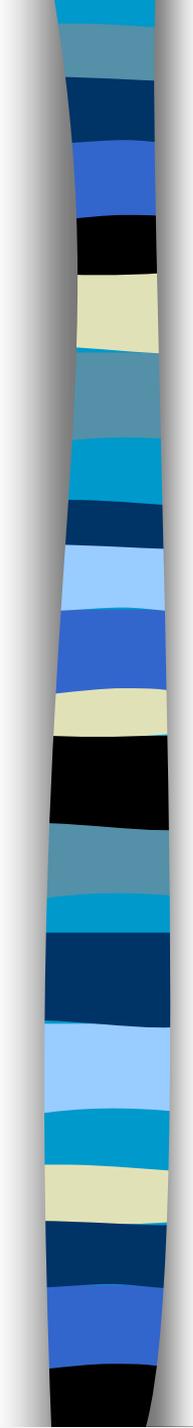
2000 punti



500 punti

- La probabilità di avere rappresentanti di tutta la popolazione aumenta in modo non lineare rispetto alla dimensione del campione
  - ✓ Nell'esempio si vuole ottenere un campione per ognuno dei 10 gruppi





# Riduzione della dimensionalità

## ■ Obiettivi:

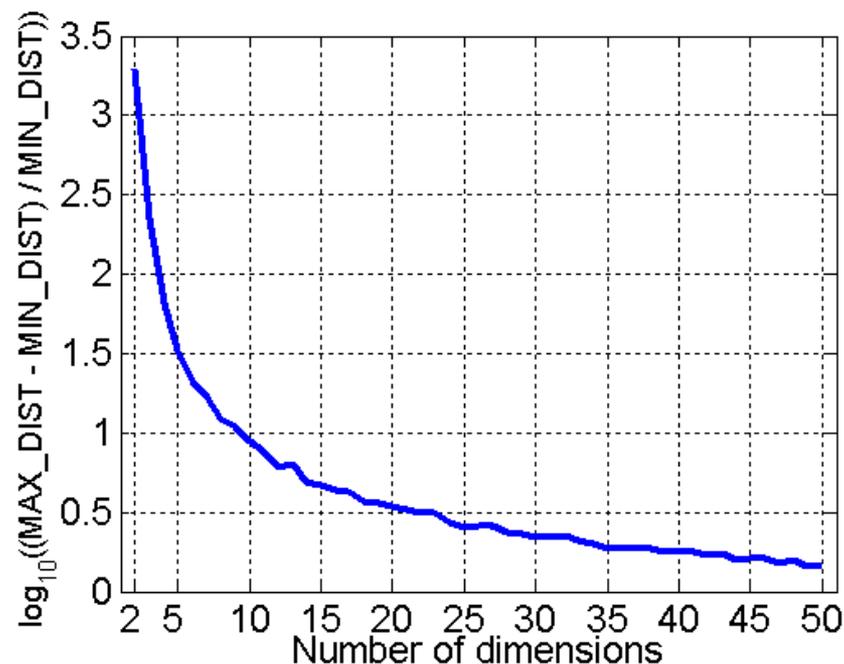
- ✓ Evitare la “*curse of dimensionality*”: la maledizione della dimensionalità
- ✓ Ridurre la quantità di tempo e di memoria utilizzata dagli algoritmi di data mining (riduzione dello spazio di ricerca)
- ✓ Semplificare la visualizzazione dei dati
- ✓ Eliminare attributi non rilevanti ed eliminare il rumore sui dati

## ■ Tecniche

- ✓ Principle Component Analysis
- ✓ Singular Value Decomposition
- ✓ Selezione degli attributi con tecniche supervisionate

# Curse of Dimensionality

- Al crescere della dimensionalità i dati diventano progressivamente più sparsi
- Molti algoritmi di clustering e di classificazione trattano con difficoltà dataset a elevata dimensionalità
- Le definizioni di densità e di distanza tra i punti che sono essenziali per esempio per il clustering e per l'individuazione degli outlier diventano meno significativi



- 500 punti generati in modo casuale
- Il grafico mostra una misura della differenza tra la distanza minima e la distanza massima di ogni coppia di punti

# Principal Component Analysis

- E' un metodo di proiezione che trasforma gli oggetti appartenenti a uno spazio  $p$ -dimensionale in uno spazio  $k$ -dimensionale (con  $k < p$ ) in modo da conservare il massimo dell'informazione (l'informazione è misurata come totale varianza del dataset) nelle dimensioni iniziali.
- Svariati gli utilizzi nell'ambito del data mining:
  - ✓ Studio e visualizzazione della correlazione tra le variabili al fine di limitare il numero di variabili da considerare
  - ✓ Ottenere dimensioni non correlate che siano combinazioni lineari delle variabili iniziali in modo da utilizzare queste dimensioni al posto delle originali.
  - ✓ Visualizzare osservazioni in uno spazio bi/tri dimensionale al fine di identificare gruppi di istanze omogenee

# Selezione degli attributi

- E' una modalità per ridurre la dimensionalità dei dati. La selezione mira solitamente a eliminare:
  - ✓ **Attributi ridondanti**
    - Duplicano in gran parte le informazioni contenute in altri attributi a causa di una forte correlazione tra le informazioni
    - Esempio: l'importo dell'acquisto e l'importo dell'IVA
  - ✓ **Caratteristiche irrilevanti**
    - Alcune caratteristiche dell'oggetto possono essere completamente irrilevanti ai fini del mining
    - Esempio: la matricola di uno studente è spesso irrilevante per predire la sua media

*Per quale tipo di pattern può essere utile la matricola assumendo che questa sia un numero positivo che non è azzerato negli anni?*



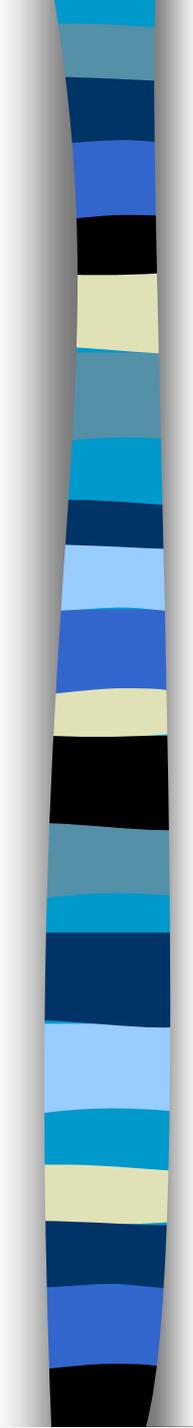
# Modalità di selezione degli attributi

## ■ Approccio esaustivo:

- ✓ Prova tutti i possibili sottoinsiemi di attributi e scegli quello che fornisce i risultati migliori sul test set utilizzando l'algoritmo di mining come funzione di bontà black box
- ✓ Dati  $n$  attributi il numero di possibili sottoinsiemi è  $2^n - 1$

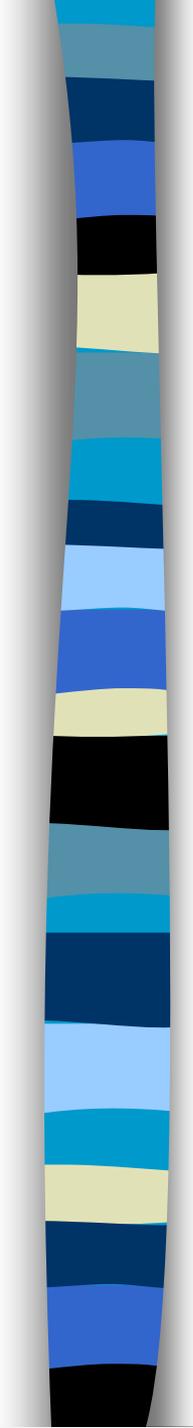
## ■ Approcci non esaustivi:

- ✓ **Approcci embedded**
  - La selezione degli attributi è parte integrante dell'algoritmo di data mining. L'algoritmo stesso decide quali attributi utilizzare (es. alberi di decisione)
- ✓ **Approcci di filtro:**
  - La fase di selezione avviene prima del mining e con criteri indipendenti dall'algoritmo usato (es. si scelgono insiemi di attributi le cui coppie di elementi presentano il più basso livello di correlazione)
- ✓ **Approcci euristici:**
  - Approssimano l'approccio esaustivo utilizzando tecniche di ricerca euristiche.



# Creazione di attributi

- Può essere utile creare nuovi attributi che meglio catturino le informazioni rilevanti in modo più efficace rispetto agli attributi originali
  - ✓ Estrazione di caratteristiche
    - Utilizzano normalmente tecniche diverse da dominio a dominio
    - Impronte digitali → minuzie
  - ✓ Mapping dei dati su nuovi spazi
    - Trasformata di Fourier
    - PCA
  - ✓ Combinazione di attributi

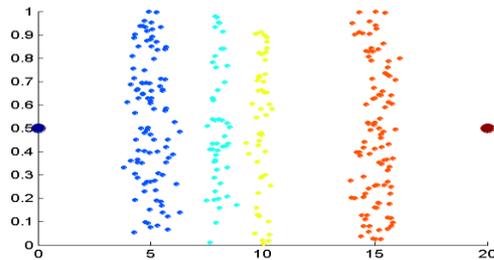


# Discretizzazione

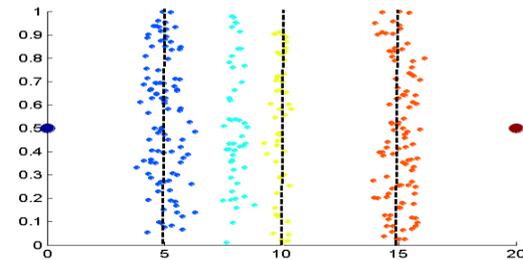
- Trasformazione di attributi a valori continui in attributi a valori discreti
  - ✓ Indispensabile per utilizzare alcune tecniche di mining (es. regole associative)
- Può essere utilizzata anche per ridurre il numero di classi di un attributo discreto
- La discretizzazione richiede di:
  - ✓ Individuare il numero più idoneo di intervalli
  - ✓ Definire come scegliere gli *split point*
- Le tecniche di discretizzazione sono:
  - ✓ Non supervisionate: non sfruttano la conoscenza sulla classe di appartenenza degli elementi
  - ✓ Supervisionate: sfruttano la conoscenza sulla classe di appartenenza degli elementi

# Discretizzazione non supervisionata

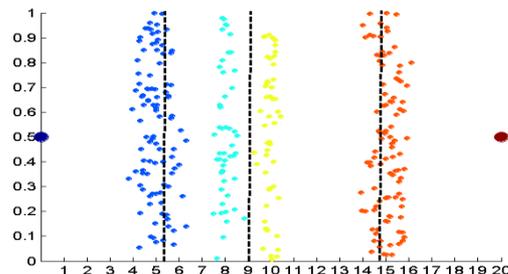
- **Equi-larghezza:** il range è suddiviso in intervalli di uguale lunghezza
- **Equi-frequenza:** il range è suddiviso in intervalli con un simile numero di elementi
- **K-mediani:** sono individuati k raggruppamenti in modo da minimizzare la distanza tra i punti appartenenti allo stesso raggruppamento



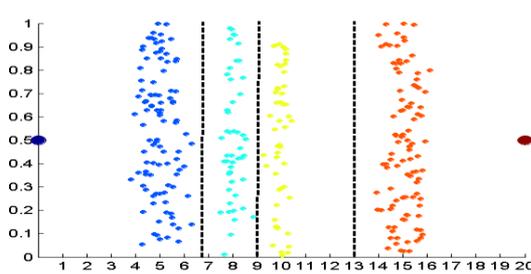
Dati



Equi-width



Equi-frequency



K-mediani

# Discretizzazione supervisionata

- Gli intervalli di discretizzazione sono posizionati in modo da massimizzare la “purezza” degli intervalli.
- Si ricade in un problema di classificazione in cui a partire da classi (intervalli) composte da (contenenti) un solo elemento si fondono ricorsivamente classi attigue.
  - ✓ Una misura statistica della purezza è l'entropia degli intervalli
- Ogni valore  $v$  di un attributo  $A$  è una possibile frontiera per la divisione negli intervalli  $A \leq v$  e  $A > v$ .
- Scelgo il valore che fornisce il maggiore **guadagno di informazione**, ossia la maggior riduzione di entropia
  - ✓ Il processo si applica ricorsivamente ai sotto-intervalli così ottenuti, fino a che non si raggiunge una condizione di arresto ad esempio, fino a che il guadagno di informazione che si ottiene diventa inferiore a una certa soglia  $d$

# Entropia e guadagno informativo

- Interpretazione “fisica”: misura del disordine
- Teoria dell’Informazione: è la misura dell’*incertezza* sul risultato di un esperimento modellabile mediante una variabile aleatoria  $X$

- ✓  $X$  variabile aleatoria  $p(X)$  è la distribuzione di probabilità di  $X$
- ✓ Se  $X$  assume valori discreti  $x_i$   $1 \leq i \leq k$

$$H(X) = - \sum_{i=1}^k p(X = x_i) \log_2 p(X = x_i) = - \sum_{i=1}^k p_i \log_2 p_i$$

- ✓ L’entropia di un evento certo è zero!!
- ✓ L’entropia di  $k$  eventi **equiprobabili** è  $\log_2 k$  (massimo dell’incertezza)
- ✓ **ATTENZIONE**  $0 \cdot \log_2 0 = 0$

- Entropia di una classificazione, sia:

- ✓  $D$  l’insieme di eventi  $(A, C)$  da suddividere in  $n$  intervalli
- ✓  $|D| = m$  il numero degli eventi da suddividere in intervalli in base al valore dell’attributo  $A$
- ✓  $|C| = k$  l’insieme delle possibili etichette delle classi

# Entropia e guadagno informativo

- L'entropia di una suddivisione in  $n$  intervalli è definita da:

$$e = \sum_{i=1}^n w_i e_i = - \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{m} \sum_{j=1}^k p_{ij} \log_2 p_{ij} = - \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{m} \sum_{j=1}^k \frac{m_{ij}}{m_i} \log_2 \frac{m_{ij}}{m_i}$$

- ✓  $w_i$  = peso dell'intervallo o classe (dipende dal numero di elementi che contiene)
- ✓  $e_i$  = entropia dell'intervallo o classe (dipende dalla confusione in esso presente ossia da quanti elementi di classi diverse contiene)
- ✓  $m_i$  = numero di eventi nell'intervallo  $i$ -esimo
- ✓  $m_{ij}$  = numero di eventi di classe  $j$ -esima nell'intervallo  $i$ -esimo
- ✓  $m_i/m$  = peso dell' $i$ -esimo intervallo
- ✓  $m_{ij}/m_i$  = probabilità (frazione) di eventi della classe  $j$ -esima nell'intervallo  $i$ -esimo

# Entropia e guadagno informativo

- Supponiamo di avere i seguenti 6 eventi di tipo (A,C):  
(0, s), (2,n), (30,n), (31,n), (32,s), (40,s)

- ✓ L'entropia dell'insieme non discretizzato è data da:

$$e = -\frac{3}{6} \log_2 \frac{3}{6} - \frac{3}{6} \log_2 \frac{3}{6} = 1$$

- ✓ Il guadagno informativo che si ottiene fissando il limite ( $\leq$ ) dell'intervallo sui diversi valori di A è:

$$GI(A,0) = 1 - \left( -\frac{1}{6} \left( \frac{1}{1} \log_2 \frac{1}{1} + \frac{0}{1} \log_2 \frac{0}{1} \right) - \frac{5}{6} \left( \frac{3}{5} \log_2 \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \log_2 \frac{2}{5} \right) \right) = 1 - \frac{5}{6} (0.44 + 0.53) = 0.19$$

$$GI(A,2)=0$$

$$GI(A,30)=0.08$$

$$GI(A,31)=0.46$$

$$GI(A,32)=0.19$$

$$GI(A,40)=0$$

- Il guadagno di informazione maggiore si ha generando i sottointervalli  $A \leq 31$  e  $A > 31$

Calcolare  $GI(A,31)$



# Binarizzazione

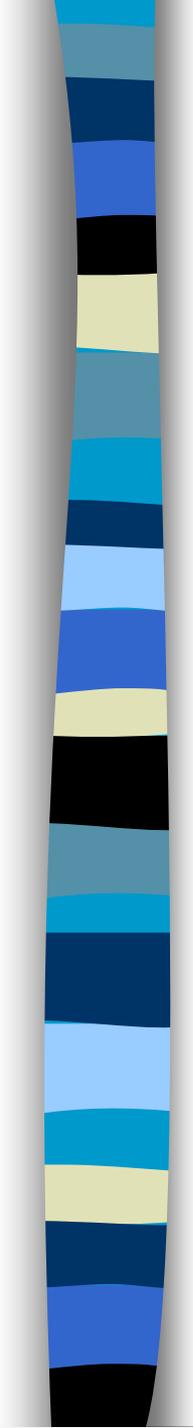
- La rappresentazione di un attributo discreto mediante un insieme di attributi binari è invece detta **binarizzazione**

Categoria	Valore intero	X1	X2	X3
Gravemente insuff.	4	0	0	0
Insuff.	5	0	0	1
Suff.	6	0	1	0
Discreto	7	0	1	1
Buono	8	1	0	0

- Questa soluzione può portare la tecnica di data mining a inferire una relazione tra “Suff” e “Discreto” poiché entrambi hanno il bit  $X2=1$

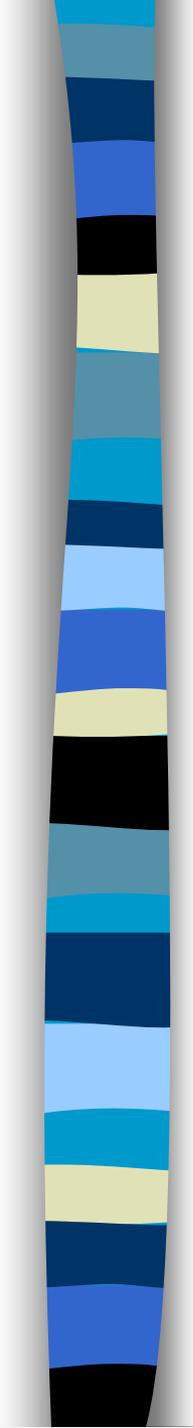
- Questa soluzione utilizza attributi asimmetrici binari

Categoria	Valore intero	X1	X2	X3	X4	X5
Gravemente insuff.	4	1	0	0	0	0
Insuff.	5	0	1	0	0	0
Suff.	6	0	0	1	0	0
Discreto	7	0	0	0	1	0
Buono	8	0	0	0	0	1



# Trasformazione di attributi

- Una funzione che mappa l'intero insieme di valori di un attributo in un nuovo insieme in modo tale che a ogni valore nell'insieme di partenza corrisponda un unico valore in quello di arrivo
  - ✓ Funzioni semplici:  $x^k$ ,  $\log(x)$ ,  $e^x$ ,  $|x|$
  - ✓ Standardizzazione e normalizzazione



# Trasformazione di attributi

- Funzioni semplici: sono utilizzate per
  - ✓ Enfatizzare alcune proprietà dei dati
    - Particolari distribuzioni dei dati
  - ✓ Ridurre range di variabilità troppo elevate
    - La quantità di byte trasferiti in una sessione varia da 1 a un bilione! Utilizzando una trasformazione logaritmica in base 10 si riducono le differenze tra file di dimensione  $10^8$  e  $10^9$  per enfatizzare che entrambi riguardano trasferimenti di file di grandi dimensione. Tale differenza sarà maggiore a quella tra 10 ( $10^1$ ) e 1000 ( $10^3$ ) che potrebbero modellare due tipi di operazioni differenti in rete.
- Attenzioni alle proprietà della trasformazione
  - ✓  $1/X$  riduce i valori maggiori di 1 ma incrementa quelli minori di 1 quindi inverte l'ordinamento di un insieme di eventi

# Trasformazione di attributi

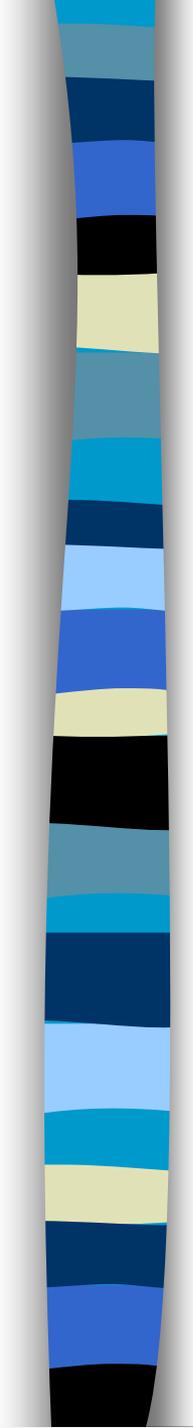
- Normalizzazione: permette all'intero set di valori di rispettare una certa proprietà
  - ✓ Necessaria per poter combinare variabili con differenti intervalli di variazione
    - Si pensi per esempio a dover combinare l'età di una persona con il suo reddito
- Max-Min normalization: si riscalda l'attributo A in modo che i nuovi valori cadano tra  $NewMin_A$  e  $NewMax_A$ .

$$x' = \frac{(x - Min_A)}{(Max_A - Min_A)} (NewMax_A - NewMin_A) + NewMin_A$$

- Molto sensibile agli outlier
- Richiede di conoscere minimo e massimo
- ✓ Z-score normalization: fa sì che una distribuzione statistica abbia media 0 e deviazione standard 1

$$x' = (x - \bar{x}) / s_x$$

- Meno sensibile agli outlier
- I valori riscalati non rientrano in un intervallo predefinito



# Similarità e dissimilarità

## ■ Similarità

- ✓ Una misura numerica che esprime il grado di somiglianza tra due oggetti
- ✓ E' tanto maggiore quanto più gli oggetti si assomigliano
- ✓ Normalmente assume valori nell'intervallo  $[0,1]$

## ■ Dissimilarità o distanza

- ✓ Una misura numerica che esprime il grado di differenza tra due oggetti
- ✓ E' tanto minore quanto più gli oggetti si assomigliano
- ✓ Il range di variazione non è fisso, normalmente assume valori nell'intervallo  $[0,1]$  oppure  $[0,\infty]$

- La similarità/dissimilarità tra due oggetti con più attributi è tipicamente definita combinando opportunamente le similarità/dissimilarità tra le coppie di attributi corrispondenti

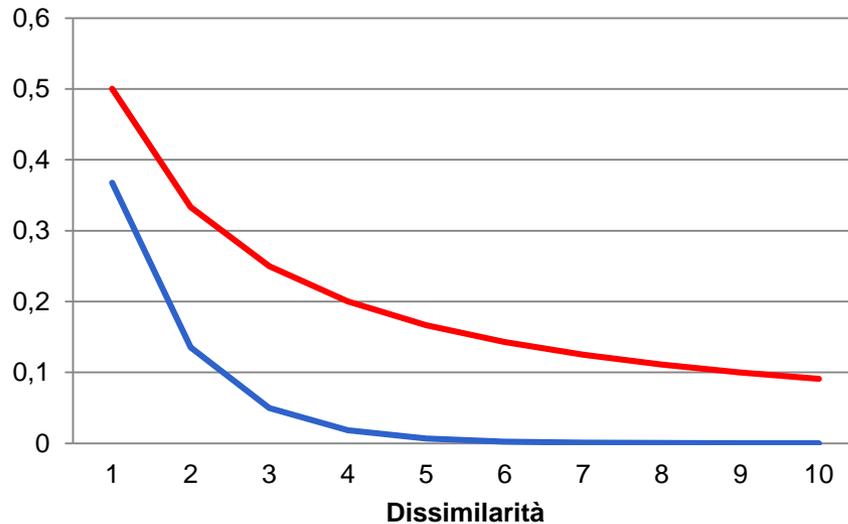
# Similarità e dissimilarità

- Il significato cambia in base al tipo di attributo considerato

Tipo		Dissimilarità	Similarità
Categorici (qualitativi)	Nominale	$d = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$	$s = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y \\ 0 & \text{se } x \neq y \end{cases}$
	Ordinale (con valori mappati in $[0, n-1]$ )	$d = \frac{ x - y }{n - 1}$	$s = 1 - d$
Numerici (quantitativi)	Di Intervallo o Di Rapporto	$d =  x - y $	$s = -d$ $s = \frac{1}{1 + d}$ $s = e^{-d}$ $s = 1 - \frac{d - MinD}{MaxD - MinD}$

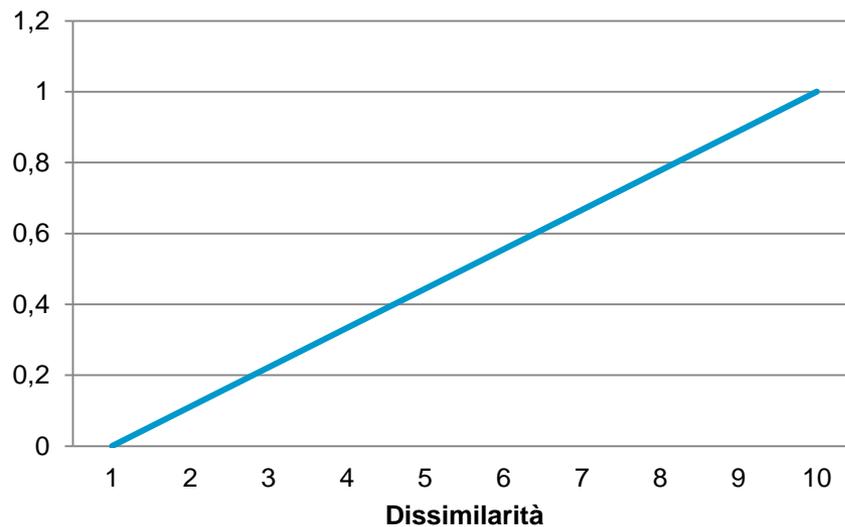
- La similarità in giallo non è vincolata al range  $[0, \dots, 1]$  e quindi si preferiscono usare i rapporti anche se forniscono misure non lineari

# Similarità e dissimilarità



$$s = \frac{1}{1+d}$$

$$s = e^{-d}$$



$$s = \frac{d - \text{Min}D}{\text{Max}D - \text{Min}D}$$

# Distanze

- Sono dissimilarità con particolari proprietà

- Distanza euclidea

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$$

- ✓  $n$  è il numero degli attributi (dimensioni) coinvolte

- Distanza di Minkowski

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^r \right)^{1/r}$$

- ✓  $r=1$  City block
- ✓  $r=2$  Distanza euclidea
- ✓  $r=\infty$  Lmax ossia la massima differenza tra tutte le coppie di attributi corrispondenti

# Distanze

- Sono dissimilarità con particolari proprietà

- Distanza euclidea

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$$

- ✓  $n$  è il numero degli attributi (dimensioni) coinvolte

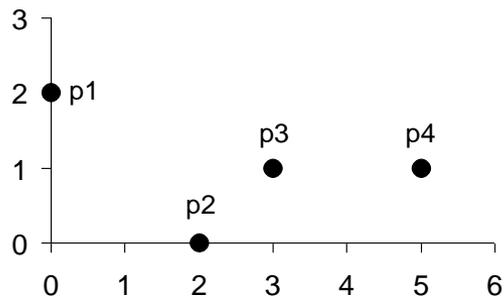
- Distanza di Minkowski

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^r \right)^{1/r}$$

- ✓  $r=1$  City block
- ✓  $r=2$  Distanza euclidea
- ✓  $r=\infty$  Lmax ossia la massima differenza tra tutte le coppie di attributi corrispondenti

# Distanza di Minkowski

Punti	x	y
p1	0	2
p2	2	0
p3	3	1
p4	5	1



L1	p1	p2	p3	p4
p1	0	4	4	6
p2	4	0	2	4
p3	4	2	0	2
p4	6	4	2	0

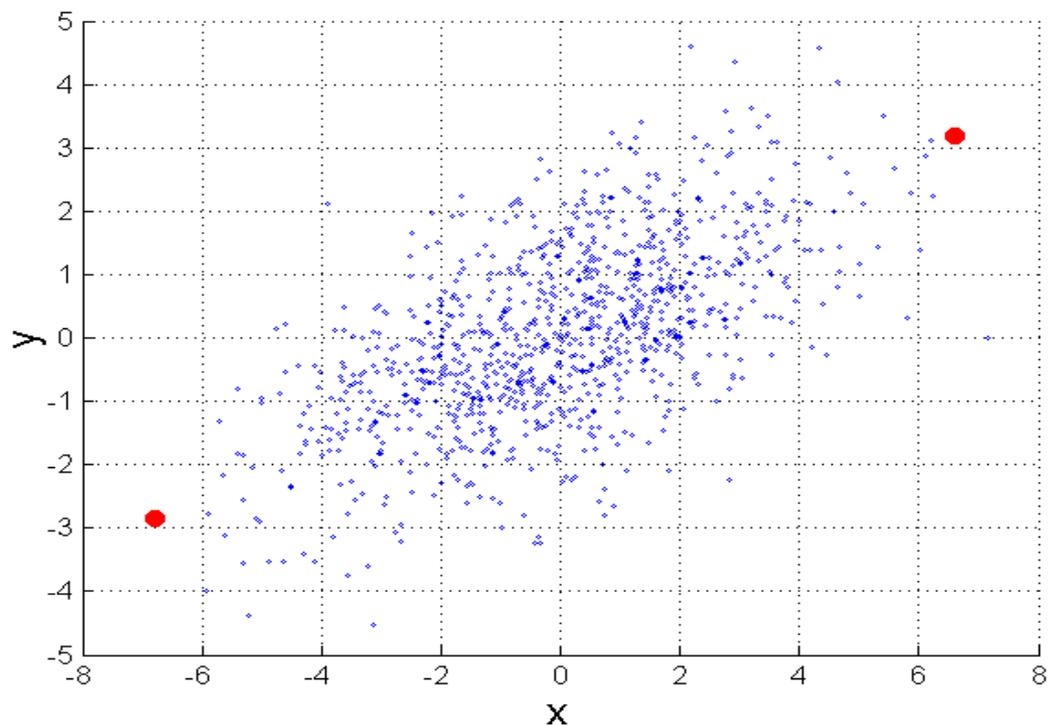
L2	p1	p2	p3	p4
p1	0	2.828	3.162	5.099
p2	2.828	0	1.414	3.162
p3	3.162	1.414	0	2
p4	5.099	3.162	2	0

$L_\infty$	p1	p2	p3	p4
p1	0	2	3	5
p2	2	0	1	3
p3	3	1	0	2
p4	5	3	2	0

**Matrice delle distanze**

# Distanza di Mahalanobis

$$\text{mahalanobis}(p, q) = (p - q) \Sigma^{-1} (p - q)^T$$

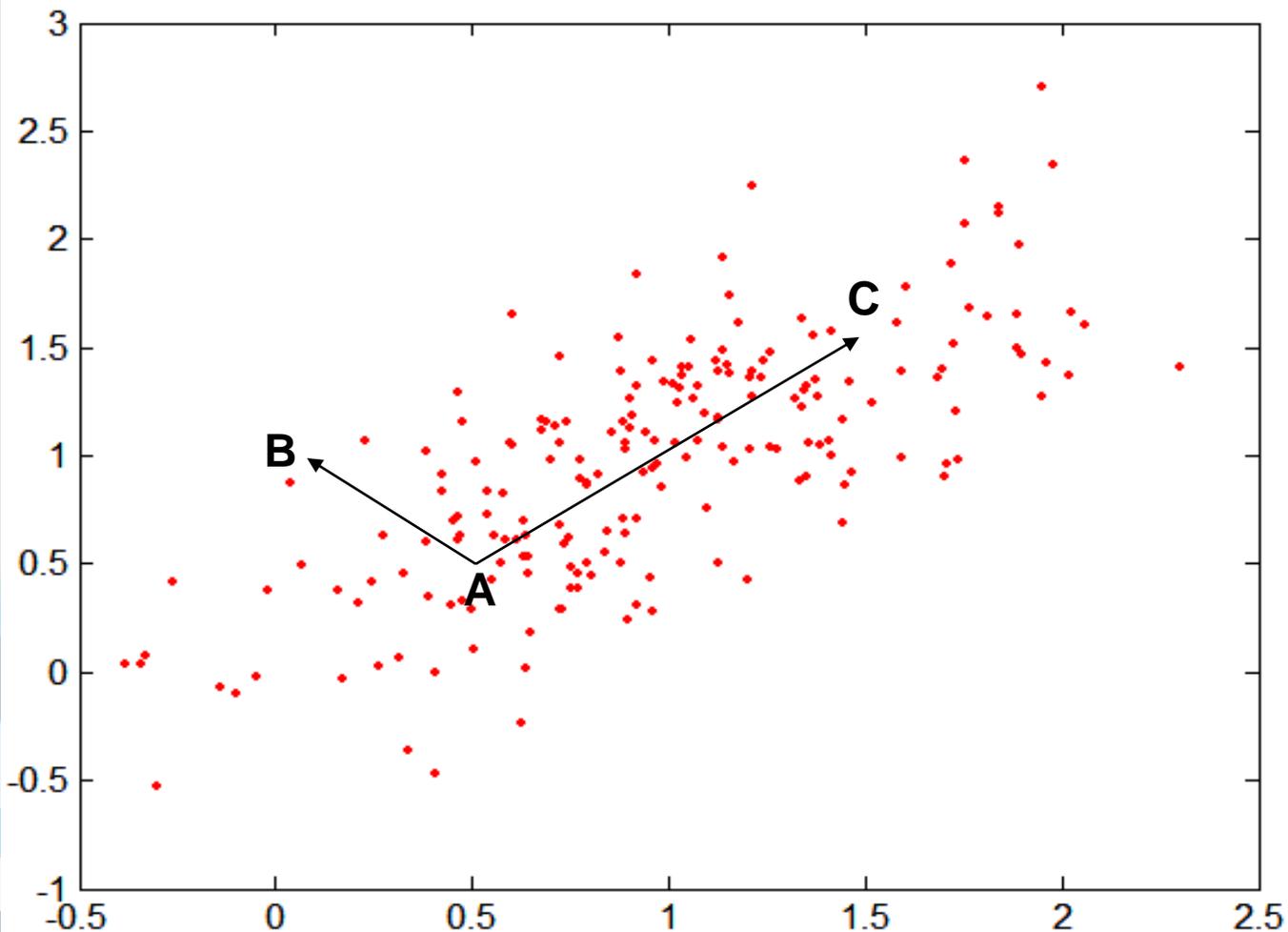


$\Sigma$  è la matrice di covarianza dei punti

$$\Sigma_{j,k} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)(X_{ik} - \bar{X}_k)$$

Per i punti in rosso, la distanza euclidea è 14.7, quella di Mahalanobis è 6.

# Mahalanobis Distance



Covariance Matrix:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

A: (0.5, 0.5)

B: (0, 1)

C: (1.5, 1.5)

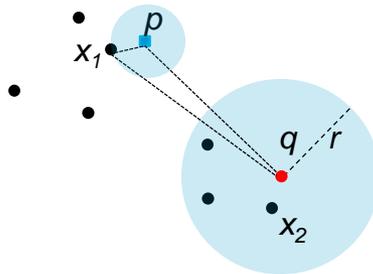
Mahal(A,B) = 5

Mahal(A,C) = 4

# Proprietà delle distanze

- Dati due oggetti  $p$  e  $q$  e una misura di dissimilarità  $d()$ 
  1.  $d(p, q) \geq 0$  (Positività I)
  2.  $d(p, q) = 0$  solo se  $p = q$  (Positività II)
  3.  $d(p, q) = d(q, p)$  (Simmetria)
  4.  $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$  (Disuguaglianza triangolare)
- Una distanza che soddisfi tutte le proprietà è detta **metrica**
- Le proprietà delle distanze rendono più agevole (o possibile) l'utilizzo di alcuni algoritmi (es. clustering).

# Query di range e disuguaglianza triangolare



Sia dato un insieme di punti  $P=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  una range query con raggio  $r$  da un punto  $q$ . Siano note inoltre le distanze  $d(x_i, p)$  con  $x_i \in P$

Sfruttando la disuguaglianza triangolare è possibile limitare il numero di distanze  $d(x_i, q)$  da calcolare per rispondere alla query

- $d(p, q) \leq d(p, x_i) + d(q, x_i) \rightarrow d(q, x_i) \geq d(p, q) - d(p, x_i) \rightarrow d(q, x_i) \geq LB$  tutti i punti  $x_i$  per cui  $d(p, q) - d(p, x_i) > r$  devono essere scartati senza valutarli
- $d(p, x_i) \leq d(p, q) + d(q, x_i) \rightarrow d(q, x_i) \leq d(p, x_i) - d(p, q) \rightarrow d(q, x_i) \leq UB$  tutti i punti  $x_i$  per cui  $d(p, x_i) - d(p, q) < r$  devono essere accettati senza valutarli

# Dissimilarità non metriche

## ■ Set difference

- ✓ La differenza tra due insiemi A e B non gode della proprietà di simmetricità
- ✓  $A = \{1,2,3,4\}$   $B = \{2,3,4\}$   $A-B = \{1\}$   $B-A = \emptyset$

## ■ Tempo

$$d(t_1, t_2) = \begin{cases} t_2 - t_1 & \text{se } t_1 < t_2 \\ 24 + t_2 - t_1 & \text{se } t_1 \geq t_2 \end{cases}$$

- ✓ Non rispetta la simmetricità
  - La distanza  $d(1\text{pm}, 2\text{pm}) = 1$
  - La distanza  $d(2\text{pm}, 1\text{pm}) = 23$

*Esiste una misura di similarità tra insiemi che sia una metrica?*



# Proprietà delle similarità

- Anche le misure di similarità hanno delle proprietà comuni
- Dati due oggetti  $p$  e  $q$  e una misura di similarità  $s( )$ 
  1.  $s(p, q) = 1$  solo se  $p = q$ .
  2.  $s(p, q) = s(q, p)$  (Simmetria)
- Non esiste per le misure di similarità un concetto equivalente alla disuguaglianza triangolare
- Talvolta le misure di similarità possono essere convertite in metriche (es. similarità Coseno e Jaccard)

# Similarità tra vettori binari

- E' frequente che gli attributi che descrivono un oggetto contengano solo valori binari. Dati quindi i due vettori  $p$  e  $q$ , si definiscono le seguenti grandezze
  - ✓  $M_{01}$  = Il numero di attributi in cui  $p = 0$  e  $q = 1$
  - ✓  $M_{10}$  = Il numero di attributi in cui  $p = 1$  e  $q = 0$
  - ✓  $M_{00}$  = Il numero di attributi in cui  $p = 0$  e  $q = 0$
  - ✓  $M_{11}$  = Il numero di attributi in cui  $p = 1$  e  $q = 1$
- Simple Matching coefficient
  - ✓  $SMC = \text{numero di match} / \text{numero di attributi}$   
 $= (M_{11} + M_{00}) / (M_{01} + M_{10} + M_{11} + M_{00})$
  - ✓ Utile per misurare quali studenti hanno risposto in modo simile alle domande di un test VERO/FALSO
  - ✓ Non utilizzabile in presenza di attributi **asimmetrici**
- Coefficiente di Jaccard
  - ✓  $J = \text{num. di corrispondenze } 11 / \text{num. attributi con valori diversi da } 00$   
 $= (M_{11}) / (M_{01} + M_{10} + M_{11})$
  - ✓ Non considera i casi le corrispondenze 00

# SMC versus Jaccard: un esempio

- Siano  $p$  e  $q$  i vettori che descrivono le transazioni di acquisto di due clienti. Ogni attributo corrisponde a uno dei prodotti in vendita

$$p = 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$$

$$q = 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1$$

$$M_{01} = 2 \quad M_{10} = 1 \quad M_{00} = 7 \quad M_{11} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{SMC} &= (M_{11} + M_{00}) / (M_{01} + M_{10} + M_{11} + M_{00}) \\ &= (0 + 7) / (2 + 1 + 0 + 7) = 0.7 \end{aligned}$$

$$J = (M_{11}) / (M_{01} + M_{10} + M_{11}) = 0 / (2 + 1 + 0) = 0$$

- Con SMC gli attributi a 0 dominano l'informazione derivante dagli attributi a 1

# Similarità Coseno

- Come l'indice di Jaccard non considera le corrispondenze 00, ma permette inoltre di operare con vettori non binari
  - ✓ Codifica di documenti in cui ogni attributo del vettore codifica il numero di volte in cui la parola corrispondente compare nel testo
- Siano  $d_1$  e  $d_2$  sono due vettori non binari
$$\cos( d_1, d_2 ) = (d_1 \bullet d_2) / \|d_1\| \|d_2\| ,$$
dove  $\bullet$  indica il prodotto scalare dei vettori e  $\| d \|$  è la lunghezza del vettore d.
$$\|d\| = \sqrt{d \cdot d} = \sqrt{\sum_{k=1}^n d_k^2}$$
  - ✓ La similarità coseno è effettivamente una misura dell'angolo tra i due vettori ed è quindi 0 se l'angolo è  $90^\circ$ , ossia se non condividono alcun elemento comune

# Similarità Coseno: un esempio ML

$$d_1 = 3 \ 2 \ 0 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0$$

$$d_2 = 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2$$

$$d_1 \cdot d_2 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 5$$

$$\begin{aligned} \|d_1\| &= (3^2 + 2^2 + 0^2 + 5^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2)^{0.5} = (42)^{0.5} \\ &= 6.481 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|d_2\| &= (1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 + 2^2)^{0.5} = (6)^{0.5} \\ &= 2.245 \end{aligned}$$

$$\cos(d_1, d_2) = 0.343$$

*La similarità coseno è spesso utilizzata per calcolare la similarità tra i documenti: a ogni elemento del vettore corrisponde un termine. Documenti con lunghezze diverse avranno vettori con lunghezze diverse. Che tipo di normalizzazione può essere necessaria per confrontare documenti di lunghezza diversa?*



# Correlazione

- La correlazione tra coppie di oggetti descritti da attributi (binari o continui) è una misura dell'esistenza di una relazione lineare tra i suoi attributi

$$\text{Corr}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\text{StDev}(\mathbf{x}) \cdot \text{StDev}(\mathbf{y})}$$

$$\text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})$$

$$\text{StDev}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}$$

- La correlazione varia tra  $[-1, 1]$ .
  - ✓ Una correlazione di 1 (-1) significa che gli attributi possono essere vicendevolmente espressi da una relazione lineare del tipo  $x_k = ay_k + b$

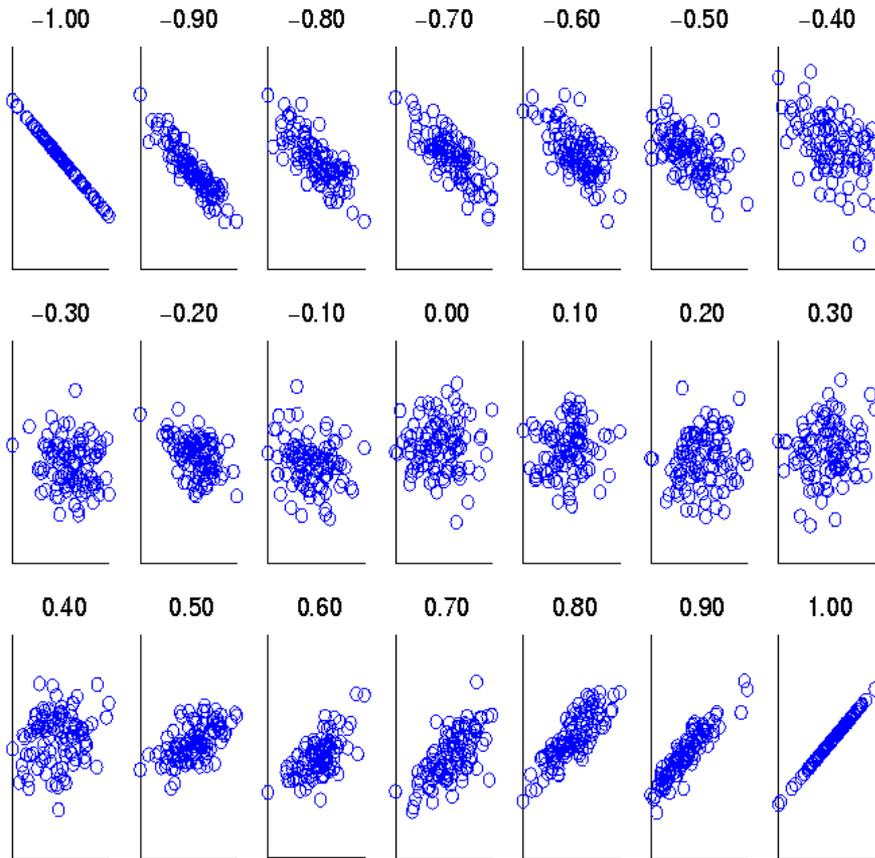
# Correlazione

$$\mathbf{x}=(-3, 6, 0, 3, -6) \quad \mathbf{y}=(1,-2, 0, -1, 2) \quad \text{Corr}(\mathbf{x},\mathbf{y})=-1$$

$$\mathbf{x}=(3, 6, 0, 3, 6) \quad \mathbf{y}=(1,2, 0, 1, 2) \quad \text{Corr}(\mathbf{x},\mathbf{y})=1$$

- Potrebbero comunque esistere tra i dati relazioni non lineari che non sarebbero quindi non catturate!
  - ✓ Tra i seguenti oggetti esiste una correlazione del tipo  $x_k=y_k^2$  ma  $\text{Corr}(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ 
$$\mathbf{x}=(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3) \quad \mathbf{y}=(9, 4, 1, 0, 1, 4, 9)$$
- La correlazione può essere utile anche per scartare attributi che non portano informazioni aggiuntive
  - ✓ In questo caso  $x$  e  $y$  rappresentano due attributi distinti e i loro elementi le istanze dei due attributi nei diversi oggetti del data set

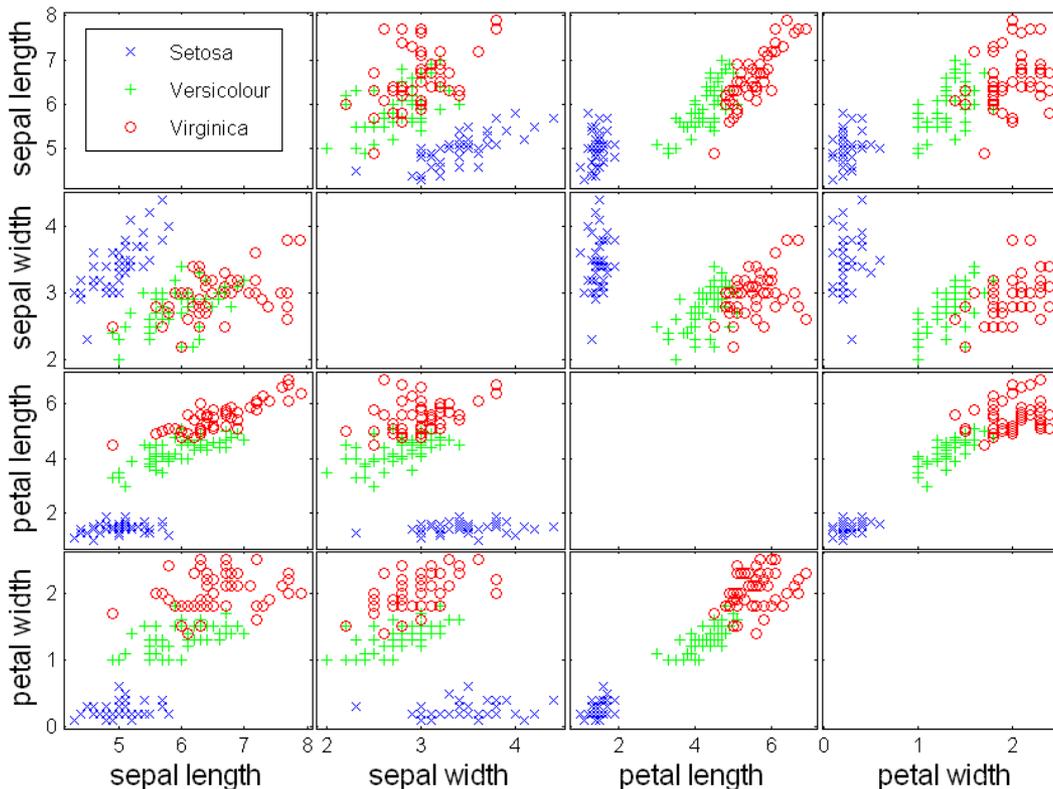
# Visualizzazione della correlazione



- ✓  $x$  e  $y$  sono due oggetti descritti da 30 attributi continui.
- ✓ In ogni grafico i valori degli attributi sono stati generati con livelli diversi di correlazione
- ✓ Ogni cerchio rappresenta uno dei trenta attributi di  $x$  e  $y$ . La sua ascissa corrisponde a  $x_k$  mentre l'ordinata a  $y_k$

# Visualizzazione della correlazione: grafici a dispersione

- ✓ Permette di determinare se alcuni degli attributi sono correlati
  - ✓ Utile per ridurre il numero di attributi considerati
- ✓ Quando le etichette sono disponibili, permette di determinare se è possibile classificare gli oggetti in base ai valori di due attributi
- ✓ Un grafico per ogni coppia di attributi utilizzati per descrivere i fiori



# Similarità in presenza di attributi eterogenei

- I precedenti approcci considerano oggetti descritti da attributi dello stesso tipo
- In presenza di attributi eterogenei è necessario calcolare separatamente le similarità e quindi combinarle in modo che il loro risultato appartenga al range [0;1]
  - ✓ Se uno o più degli attributi è asimmetrico è necessario escluderli dal computo qualora il loro match sia di tipo 00
  - ✓ Se gli attributi hanno una rilevanza diversa è possibile aggiungere un peso  $w_k$  nel calcolo della similarità complessiva. E' consigliabile che la somma dei pesi sia 1

$$Sim(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\sum_{k=1}^n w_k \delta_k s_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\sum_{k=1}^n \delta_k} \quad \delta_k \begin{cases} 0 & \text{se l'attributo } k \text{ è asimmetrico o il match è } 00 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$